Εύρεση ν-στού πρώτου αριθμού

Ορισμός

Πρώτος αριθμός λέγεται κάθε φυσικός αριθμός (εκτός της μονάδας) που έχει φυσικούς διαιρέτες μόνο τον εαυτό του και τη μονάδα.

Ερώτημα:

Να υπολογιστεί ο ν-στός πρώτος αριθμός $\Pi(\nu)$.

Λύση

Α – Προσδιορισμός αλγορίθμου

Θεωρώ γνωστούς τους δύο πρώτους αριθμούς 2 και 3.

Σχηματίζω τις παρακάτω ισότητες (A_i)

(A_i)

A_1) α) $I_\kappa = (2\kappa - 1)x_1 + y_1$ β) $I'_\kappa = 2\kappa x_1 + y'_1$

A_2) α) $I_\kappa = 2\kappa x_2 + y_2$ β) $I'_\kappa = (2\kappa + 1)x_2 + y'_2$

A_3) α) $I_\kappa = (2\kappa + 1)x_3 + y_3$ β) $I'_\kappa = (2\kappa + 2)x_3 + y'_3$

A_4) α) $I_\kappa = (2\kappa + 2)x_4 + y_4$ β) $I'_\kappa = (2\kappa + 3)x_4 + y'_4$

A_5) α) $I_\kappa = (2\kappa + 3)x_5 + y_5$ β) $I'_\kappa = (2\kappa+4)x_5 + y'_5$

A_6) α) $I_\kappa = (2\kappa + 4)x_6 + y_6$ β) $I'_\kappa = (2\kappa+5)x_6 + y'_6$

……………………………………………………………………………………………………….

Στις παραπάνω ισότητες (A_i) ορίζω τους y'_i, y_i και x_i $(i = 1,\ 2,\ 3,\ 4, \dots)$ ως εξής:

1) Τους $y'_1, y'_3, y'_5,\ y'_7,\ \dots$ δηλαδή όλους τους αντίστοιχους y'_i με περιττούς δείκτες να ισούνται με τους δείκτες αυτών. Έτσι έχω:

$$y'_1 = 1, \quad y'_3 = 3, \quad y'_5 = 5, \quad y'_7 = 7, \dots \text{ κ.ο.κ.}$$

2) Τους $y'_2,\ y'_4,\ y'_6,\ y'_8 \dots$ δηλαδή όλους τους αντίστοιχους y'_i με άρτιους δείκτες να ισούνται με το διπλάσιο αριθμό του δείκτη αυτών. Έτσι έχω:

$$y'_2 = 4, \quad y'_4 = 8, \quad y'_6 = 12, \quad y'_8 = 16, \dots \text{ κ.ο.κ.}$$

3) Τους $y_2,\ y_4,\ y_6,\ y_8 \dots$ δηλαδή όλους τους αντίστοιχους y_i με άρτιους δείκτες να είναι ίσοι με τον αριθμό του δείκτη αυτών. Έτσι έχω:

$$y_2 = 2, \quad y_4 = 4, \quad y_6 = 6, \quad y_8 = 8, \dots \text{ κ.ο.κ.}$$

4) Τους $y_1,\ y_3,\ y_5,\ y_7 \dots$ δηλαδή όλους τους αντίστοιχους y_i με περιττούς δείκτες να είναι ίσοι με το άθροισμα των αντίστοιχων y'_i και την αντίστοιχη αριθμητική τιμή για $\kappa = 1$ του συντελεστή του x_i της ισότητας (A_i) (β). Έτσι έχω:
$y'_1 = 1$. Ο συντελεστής του x_1 της (A_1) (β) είναι ο 2κ. Αριθμητική του τιμή για $\kappa = 1$ είναι $2 \cdot 1 = 2$. Άρα $y_1 = y'_1 + 2 = 1 + 2 = 3$.

Όμοια έχω: $y'_3 = 3$. Ο συντελεστής του x_3 της (A_3) (β) είναι ο $(2\kappa + 2)$. Αριθμητική του τιμή για $\kappa = 1$ είναι $(2 \cdot 1 + 2) = 4$. Άρα $y_3 = y'_3 + 4 = 3 + 4 = 7$.
Όμοια προκύπτουν: $y_5 = 11, \ldots$ κ.ο.κ.

Σύμφωνα με τα παραπάνω οι ισότητες (A_i) παίρνουν τη μορφή:

(A_i)

A_1)	α) $I_\kappa = (2\kappa - 1)x_1 + 3$	β) $I'_\kappa = 2\kappa x_1 + 1$
A_2)	α) $I_\kappa = 2\kappa x_2 + 2$	β) $I'_\kappa = (2\kappa + 1)x_2 + 4$
A_3)	α) $I_\kappa = (2\kappa + 1)x_3 + 7$	β) $I'_\kappa = (2\kappa + 2)x_3 + 3$
A_4)	α) $I_\kappa = (2\kappa + 2)x_4 + 4$	β) $I'_\kappa = (2\kappa + 3)x_4 + 8$
A_5)	α) $I_\kappa = (2\kappa + 3)x_5 + 11$	β) $I'_\kappa = (2\kappa+4)x_5 + 5$
A_6)	α) $I_\kappa = (2\kappa + 4)x_5 + 6$	β) $I'_\kappa = (2\kappa+5)x_6 + 12$

……………………………………………………………………………………………………….

5) Τους συντελεστές $x_1, x_3, x_5,\ x_7,\ \ldots$ δηλαδή όλους τους αντίστοιχους x_i με περιττούς δείκτες, τους υπολογίζω αν προσθέσω την αριθμητική τιμή για $\kappa = 1$ του αντίστοιχου συντελεστή τους της (A_i)(β) με τον αντίστοιχο y_i.
Έτσι έχω: Ο συντελεστής του x_1 της (A_1)(β) είναι ο 2κ. Η αριθμητική του τιμή για $\kappa = 1$ είναι $2 \cdot 1 = 2$. Ο $y_1 = 3$. Επομένως $x_1 = 2 + y_1 = 2 + 3 = 5$. Όμοια, ο συντελεστής του x_3 της (A_3)(β) είναι $(2k + 2)$. Η αριθμητική του τιμή για $\kappa = 1$ είναι $(2 \cdot 1 + 2) = 4$. Ο $y_3 = 7$. Επομένως $x_3 = 4 + y_3 = 4 + 7 = 11$. Όμοια προκύπτουν: $x_5 = 17,\ \ldots$ κ.ο.κ.

6) Τέλος, τους $x_2, x_4, x_6,\ x_8,\ \ldots$ δηλαδή όλους τους αντίστοιχους x_i με άρτιους δείκτες, τους υπολογίζω αν προσθέσω την αριθμητική τιμή για $\kappa = 1$ του αντίστοιχου συντελεστή τους της (A_i) (β) με τον αντίστοιχο y'_i.
Έτσι έχω: Ο συντελεστής του x_2 της (A_2) (β) είναι ο $(2\kappa + 1)$. Η αριθμητική του τιμή για $\kappa = 1$ είναι $(2 \cdot 1 + 1) = 3$. Ο $y'_2 = 4$. Επομένως $x_2 = 3 + y'_2 = 3 + 4 = 7$. Όμοια, ο συντελεστής του x_4 της (A_4) (β) είναι $(2k + 3)$. Η αριθμητική του τιμή για $\kappa = 1$ είναι $(2 \cdot 1 + 3) = 5$. Ο $y'_4 = 8$. Επομένως $x_4 = 5 + y'_4 = 5 + 8 = 13$. Όμοια προκύπτουν: $x_6 = 19,\ \ldots$ κ.ο.κ.

Κατόπιν όλων των παραπάνω οι ισότητες (A_i) λαμβάνουν την μορφή των παρακάτω ***αριθμητικών προόδων πλέον*** (B_i) $(i = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ \ldots)$

(B_i)

B_1)	α) $I_\kappa = (2\kappa - 1)5 + 3$	β) $I'_\kappa = (2\kappa)5 + 1$
	με $I_1 = 8,\ \omega = 10,$	με $I_1 = 11,\ \omega = 10,$
B_2)	α) $I_\kappa = (2\kappa)7 + 2$	β) $I'_\kappa = (2\kappa + 1)7 + 4$
	με $I_1 = 16,\ \omega = 14,$	με $I_1 = 25,\ \omega = 14,$
B_3)	α) $I_\kappa = (2\kappa + 1)11 + 7$	β) $I'_\kappa = (2\kappa + 2)11 + 3$
	με $I_1 = 40,\ \omega = 22,$	με $I_1 = 47,\ \omega = 22,$

B$_4$) α) $I_\kappa = (2\kappa+2)13+4$ β) $I'_\kappa = (2\kappa+3)13+8$

με $I_1 = 56,\ \omega = 26,$ με $I_1 = 73,\ \omega = 26,$

B$_5$) α) $I_\kappa = (2\kappa+3)17+11$ β) $I'_\kappa = (2\kappa+4)17+5$

με $I_1 = 96,\ \omega = 34,$ με $I_1 = 107,\ \omega = 34,$

B$_6$) α) $I_\kappa = (2\kappa+4)19+6$ β) $I'_\kappa = (2\kappa+5)19+12$

με $I_1 = 120,\ \omega = 38,$ με $I_1 = 145,\ \omega = 38,$

……

B – Εκτέλεση αλγορίθμου

Επειδή θεώρησα γνωστούς τους 2 και 3, αφαιρώ από τον αριθμό ν το 2 και έχω $\nu-2$. Στον αριθμό $\nu-2$ αντιστοιχίζω το 1$^{\text{ο}}$ βήμα, δηλαδή

$(\nu-2) \rightarrow$ **1$^{\text{ο}}$ βήμα.**

Αν λ είναι ο πληθικός αριθμός του συνόλου όλων των τιμών των αριθμητικών προόδων B από τις (B$_i$) με $B \leq (\nu-2)$, τότε:

$[(\nu-2)+\lambda] \rightarrow$ **2$^{\text{ο}}$ βήμα.**

Αν μ είναι ο πληθικός αριθμός του συνόλου όλων των τιμών των αριθμητικών προόδων B από τις (B$_i$) με $B \leq (\nu-2)+\lambda$, τότε:

$[(\nu-2)+\mu] \rightarrow$ **3$^{\text{ο}}$ βήμα.**

……………………………………….

Αν $[(\nu-2)+j] \rightarrow$ **X$^{\text{στό}}$ βήμα** και j είναι ο πληθικός αριθμός του συνόλου όλων των τιμών των αριθμητικών προόδων B από τις (B$_i$) με $B \leq (\nu-2)+j$, τότε:

$$\boldsymbol{\Pi(\nu)} = \begin{cases} \mathbf{3[(\nu-2)+j]+1}, & \boldsymbol{\alpha\nu\ \ o\ \ 3[(\nu-2)+j]\ \ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \acute{\alpha}\rho\tau\iota o\varsigma} \\ \mathbf{3[(\nu-2)+j]+2}, & \boldsymbol{\alpha\nu\ \ 3[(\nu-2)+j]\ \ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \ \pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{o}\varsigma}. \end{cases}$$

Παρατήρηση:

Από τη δομή των (B$_i$) και τον ορισμό των πληθικών αριθμών των αντίστοιχων βημάτων συνάγονται τα παρακάτω:

α) $0 \leq \cdots \leq \mu-\lambda \leq \lambda$ και

β) Το πλήθος των βημάτων είναι πεπερασμένο και μικρότερο είτε ίσο με $\lambda+1$.

Εφαρμογή

Ερώτημα

Να βρεθεί ο πεντηκοστός δεύτερος ($52^{ος}$) πρώτος αριθμός.

Απάντηση

Από τον αριθμό $\nu = 52$ αφαιρώ τον αριθμό 2, δηλαδή $\nu - 2 = 50$. Άρα:

1° βήμα → $\nu - 2 = \mathbf{50}$.

Εξετάζω τώρα από τις αριθμητικές προόδους (B_i) το πλήθος των I_κ και I'_κ τέτοιοι ώστε:

$I_\kappa \leq \nu - 2 = 50$ και $I'_\kappa \leq \nu - 2 = 50$.

Από την (B_1) α) προκύπτει ότι οι αριθμοί που είναι μικρότεροι είτε ίσοι του 50 είναι οι:

$I_1 = 8, I_2 = 18, I_3 = 28, I_4 = 38, I_5 = 48$. Δηλαδή $\kappa = 5$.

Από την (B_1) β) προκύπτει ότι οι αριθμοί που είναι μικρότεροι είτε ίσοι του 50 είναι οι:

$I'_1 = 11, I'_2 = 21, I'_3 = 31, I'_4 = 41$. Δηλαδή $\kappa = 4$.

Άρα $\kappa = 5 + 4 = 9$.

Όμοια, από την (B_2) α) οι αριθμοί που είναι μικρότεροι είτε ίσοι του 50 είναι οι:

$I_1 = 16, I_2 = 30, I_3 = 44$. Δηλαδή $\kappa = 3$.

Επίσης, από την (B_2) β) οι αριθμοί που είναι μικρότεροι είτε ίσοι του 50 είναι οι:

$I'_1 = 25, I'_2 = 39$. Δηλαδή $\kappa = 2$.

Πρέπει: $\kappa \in N$ με $(B_2) \neq (B_1)$ το οποίο ισχύει.

Άρα $\kappa = 3 + 2 = 5$.

Από την (B_3) α) οι αριθμοί που είναι μικρότεροι είτε ίσοι του 50 είναι μόνο ο:

$I_1 = 40$. Δηλαδή $\kappa = 1$.

Από την (B_3) β) οι αριθμοί που είναι μικρότεροι είτε ίσοι του 50 είναι μόνο ο:

$I'_1 = 47$. Δηλαδή $\kappa = 1$.

Πρέπει: $\kappa \in N$ με $(B_3) \neq (B_2)$ και $(B_3) \neq (B_1)$ τα οποία ισχύουν.

Άρα $\kappa = 1 + 1 = 2$.

Επομένως $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{9} + \mathbf{5} + \mathbf{2} = \mathbf{16}$. Άρα:

2° βήμα → $\nu - 2 + \lambda = 50 + 16 = \mathbf{66}$.

Εφαρμόζοντας τον ίδιο αλγόριθμο, εξετάζω τώρα από τις αριθμητικές προόδους (B_i) το πλήθος των I_κ και I'_κ τέτοιοι ώστε:

$I_\kappa \leq \nu - 2 + 16 = 66$ και $I'_\kappa \leq \nu - 2 + 16 = 66$.

Από την (B_1) α) έχουμε: $I_1 = 8, I_2 = 18, I_3 = 28, I_4 = 38, I_5 = 48, I_6 = 58$, δηλ. $\kappa = 6$.

Από την (B$_1$) β) έχουμε: $I'_1 = 11, I'_2 = 21, I'_3 = 31, I'_4 = 41, I'_5 = 51, I'_6 = 61$, δηλ. $\kappa = 6$.

Άρα $\kappa = 6 + 6 = 12$.

Όμοια από την (B$_2$) α) έχουμε: $I_1 = 16, I_2 = 30, I_3 = 44,\ I_4 = 58$, δηλ. $\kappa = 4$.

Από την (B$_2$) β) έχουμε: $I'_1 = 25, I'_2 = 39, I'_3 = 53$, δηλ. $\kappa = 3$.

Πρέπει: $\kappa \in N$ με $(B_2) \neq (B_1)$ το οποίο δεν ισχύει, διότι $(B_2)\ \alpha)\ I_4 = (B_1)\ \alpha)\ I_6 = 58$.
Δηλαδή ο όρος $(B_2)\ \alpha)\ I_4 = 58$ δεν υπολογίζεται (ο όρος 58 υπολογίζεται μία φορά).

Άρα $\kappa = 3 + 3 = 6$.

Επίσης, από την (B$_3$) α) έχουμε: $I_1 = 40,\ I_2 = 62$, δηλ. $\kappa = 2$.

Από την (B$_3$) β) έχουμε: $I'_1 = 47$, δηλ. $\kappa = 1$

Πρέπει: $\kappa \in N$ με $(B_3) \neq (B_2)$ και $(B_3) \neq (B_1)$ τα οποία ισχύουν.

Άρα $\kappa = 2 + 1 = 3$.

Ακόμα, από την (B$_4$) α) έχουμε: $I_1 = 56$, δηλ. $\kappa = 1$.

Από την (B$_4$) β) έχουμε: $I'_1 = 73$, δηλ. $\kappa = 0$.

Πρέπει: $\kappa \in N$ με $(B_4) \neq (B_3)$ και $(B_4) \neq (B_2)$ και $(B_4) \neq (B_1)$ τα οποία ισχύουν.

Άρα $\kappa = 1 + 0 = 1$.

Επομένως $\boldsymbol{\mu = 12 + 6 + 3 + 1 = 22}$. Άρα

3^{o} βήμα → $\nu - 2 + \mu = 50 + 22 = \mathbf{72}$.

Συνεχίζοντας βρίσκω από τις αριθμητικές προόδους (B$_i$) το πλήθος των I_κ και I'_κ τέτοιοι ώστε:

$I_\kappa \leq \nu - 2 + 22 = 72$ και $I'_\kappa \leq \nu - 2 + 22 = 72$.

Από (B$_1$) α): $I_1 = 8, I_2 = 18, I_3 = 28, I_4 = 38, I_5 = 48, I_6 = 58, I_7 = 68$, δηλ. $\kappa = 7$.

Από (B$_1$) β): $I'_1 = 11, I'_2 = 21, I'_3 = 31, I'_4 = 41, I'_5 = 51, I'_6 = 61, I'_7 = 71$, δηλ. $\kappa = 7$.

Άρα $\kappa = 7 + 7 = 14$.

Από (B$_2$) α): $I_1 = 16, I_2 = 30, I_3 = 44,\ I_4 = 58, I_5 = 72$, δηλ. $\kappa = 5$.

Από (B$_2$) β): $I'_1 = 25, I'_2 = 39, I'_3 = 53, I'_4 = 67$, δηλ. $\kappa = 4$.

Πρέπει: $\kappa \in N$ με $(B_2) \neq (B_1)$ το οποίο δεν ισχύει, διότι $(B_2)\ \alpha)\ I_4 = (B_1)\ \alpha)\ I_6 = 58$.
Δηλαδή ο όρος $(B_2)\ \alpha)\ I_4 = 58$ δεν υπολογίζεται (ο όρος 58 υπολογίζεται μία φορά).

Άρα $\kappa = 4 + 4 = 8$.

Από (B$_3$) α): $I_1 = 40,\ I_2 = 62$, δηλ. $\kappa = 2$.

Από (B$_3$) β): $I'_1 = 47, I'_2 = 69$, δηλ. $\kappa = 2$.

Πρέπει: $\kappa \in N$ με $(B_3) \neq (B_2)$ και $(B_3) \neq (B_1)$ τα οποία ισχύουν.

Άρα $\kappa = 2 + 2 = 4$.

Από (B_4) α): $I_1 = 56$, δηλ. $\kappa = 1$.

Από (B_4) β): $I'_1 = 73$, $(73 > 72)$, δηλ. $\kappa = 0$.

Πρέπει: $\kappa \in N$ με $(B_4) \neq (B_3)$ και $(B_4) \neq (B_2)$ και $(B_4) \neq (B_1)$ τα οποία ισχύουν.

Άρα $\kappa = 1 + 0 = 1$.

Επομένως $\boldsymbol{\rho = 14 + 8 + 4 + 1 = 27}$. Άρα

4ο βήμα → $\nu - 2 + \rho = 50 + 27 = \mathbf{77}$.

Εξακολουθώ βρίσκοντας από τις αριθμητικές προόδους (B_i) το πλήθος των I_κ και I'_κ τέτοιοι ώστε:

$I_\kappa \leq \nu - 2 + 27 = 77$ και $I'_\kappa \leq \nu - 2 + 27 = 77$.

Από (B_1) α): $I_1 = 8, I_2 = 18, I_3 = 28, I_4 = 38, I_5 = 48, I_6 = 58, I_7 = 68$, δηλ. $\kappa = 7$.

Από (B_1) β): $I'_1 = 11, I'_2 = 21, I'_3 = 31, I'_4 = 41, I'_5 = 51, I'_6 = 61, I'_7 = 71$, δηλ. $\kappa = 7$.

Άρα $\kappa = 7 + 7 = 14$.

Από (B_2) α): $I_1 = 16, I_2 = 30, I_3 = 44, I_4 = 58, I_5 = 72$, δηλ. $\kappa = 5$.

Από (B_2) β): $I'_1 = 25, I'_2 = 39, I'_3 = 53, I'_4 = 67$, δηλ. $\kappa = 4$.

Πρέπει: $\kappa \in N$ με $(B_2) \neq (B_1)$ το οποίο δεν ισχύει, διότι $(B_2)\ \alpha)\ I_4 = (B_1)\ \alpha)\ I_6 = 58$.
Δηλαδή ο όρος $(B_2)\ \alpha)\ I_4 = 58$ δεν υπολογίζεται (ο όρος 58 υπολογίζεται μία φορά).

Άρα $\kappa = 4 + 4 = 8$.

Από (B_3) α): $I_1 = 40, I_2 = 62$, δηλ. $\kappa = 2$.

Από (B_3) β): $I'_1 = 47, I'_2 = 69$, δηλ. $\kappa = 2$.

Πρέπει: $\kappa \in N$ με $(B_3) \neq (B_2)$ και $(B_3) \neq (B_1)$ τα οποία ισχύουν.

Άρα $\kappa = 2 + 2 = 4$.

Από (B_4) α): $I_1 = 56$, δηλ. $\kappa = 1$.

Από (B_4) β): $I'_1 = 73$, δηλ. $\kappa = 1$.

Πρέπει: $\kappa \in N$ με $(B_4) \neq (B_3)$ και $(B_4) \neq (B_2)$ και $(B_4) \neq (B_1)$ τα οποία ισχύουν.

Άρα $\kappa = 1 + 1 = 2$.

Επομένως $\boldsymbol{\sigma = 14 + 8 + 4 + 2 = 28}$. Άρα

5ο βήμα → $\nu - 2 + \sigma = 50 + 28 = \mathbf{78}$.

Συνεχίζω να βρίσκω από τις αριθμητικές προόδους (B_i) το πλήθος των I_κ και I'_κ τέτοιοι ώστε:

$I_\kappa \leq \nu - 2 + 28 = 78$ και $I'_\kappa \leq \nu - 2 + 28 = 78$

Από (B_1) α): $I_1 = 8, I_2 = 18, I_3 = 28, I_4 = 38, I_5 = 48, I_6 = 58, I_7 = 68, I_8 = 78$ δηλ. $\kappa = 8$.

Από (B$_1$) β): $I'_1 = 11, I'_2 = 21, I'_3 = 31, I'_4 = 41, I'_5 = 51, I'_6 = 61, I'_7 = 71$, δηλ. $\kappa = 7$.

Άρα $\kappa = 8 + 7 = 15$.

Από (B$_2$) α): $I_1 = 16, I_2 = 30, I_3 = 44,\ I_4 = 58, I_5 = 72$, δηλ. $\kappa = 5$.

Από (B$_2$) β): $I'_1 = 25, I'_2 = 39, I'_3 = 53, I'_4 = 67$, δηλ. $\kappa = 4$.

Πρέπει: $\kappa \in N$ με $(B_2) \neq (B_1)$ το οποίο δεν ισχύει, διότι $(B_2)\ \alpha)\ I_4 = (B_1)\ \alpha)\ I_6 = 58$. Δηλαδή ο όρος $(B_2)\ \alpha)\ I_4 = 58$ δεν υπολογίζεται (ο όρος 58 υπολογίζεται μία φορά).

Άρα $\kappa = 4 + 4 = 8$.

Από (B$_3$) α): $I_1 = 40,\ I_2 = 62$, δηλ. $\kappa = 2$.

Από (B$_3$) β): $I'_1 = 47, I'_2 = 69$, δηλ. $\kappa = 2$.

Πρέπει: $\kappa \in N$ με $(B_3) \neq (B_2)$ και $(B_3) \neq (B_1)$ τα οποία ισχύουν.

Άρα $\kappa = 2 + 2 = 4$.

Από (B$_4$) α): $I_1 = 56$, δηλ. $\kappa = 1$.

Από (B$_4$) β): $I'_1 = 73$, δηλ. $\kappa = 1$.

Πρέπει: $\kappa \in N$ με $(B_4) \neq (B_3)$ και $(B_4) \neq (B_2)$ και $(B_4) \neq (B_1)$ τα οποία ισχύουν.

Άρα $\kappa = 1 + 1 = 2$.

Επομένως $\boldsymbol{\tau = 15 + 8 + 4 + 2 = 29}$. Άρα

6^{ο} βήμα → $\nu - 2 + \tau = 50 + 29 = \mathbf{79}$.

Με την ίδια διαδικασία βρίσκω από τις αριθμητικές προόδους (B$_i$) το πλήθος των I_κ και I_κ τέτοιοι ώστε:

$I_\kappa \leq \nu - 2 + 29 = 79$ και $I'_\kappa \leq \nu - 2 + 29 = 79$.

Από (B$_1$) α): $I_1 = 8, I_2 = 18, I_3 = 28, I_4 = 38, I_5 = 48, I_6 = 58, I_7 = 68, I_8 = 78$ δηλ. $\kappa = 8$.

Από (B$_1$) β): $I'_1 = 11, I'_2 = 21, I'_3 = 31, I'_4 = 41, I'_5 = 51, I'_6 = 61, I'_7 = 71$, δηλ. $\kappa = 7$.

Άρα $\kappa = 8 + 7 = 15$.

Από (B$_2$) α): $I_1 = 16, I_2 = 30, I_3 = 44,\ I_4 = 58, I_5 = 72$, δηλ. $\kappa = 5$.

Από (B$_2$) β): $I'_1 = 25, I'_2 = 39, I'_3 = 53, I'_4 = 67$, δηλ. $\kappa = 4$.

Πρέπει: $\kappa \in N$ με $(B_2) \neq (B_1)$ το οποίο δεν ισχύει, διότι $(B_2)\ \alpha)\ I_4 = (B_1)\ \alpha)\ I_6 = 58$. Δηλαδή ο όρος $(B_2)\ \alpha)\ I_4 = 58$ δεν υπολογίζεται (ο όρος 58 υπολογίζεται μία φορά).

Άρα $\kappa = 4 + 4 = 8$.

Από (B$_3$) α): $I_1 = 40,\ I_2 = 62$, δηλ. $\kappa = 2$.

Από (B$_3$) β): $I'_1 = 47, I'_2 = 69$, δηλ. $\kappa = 2$.

Πρέπει: $\kappa \in N$ με $(B_3) \neq (B_2)$ και $(B_3) \neq (B_1)$ τα οποία ισχύουν.

Άρα $\kappa = 2 + 2 = 4$.

Από (B_4) α): $I_1 = 56$, δηλ. $\kappa = 1$.

Από (B_4) β): $I'_1 = 73$, δηλ. $\kappa = 1$.

Πρέπει: $\kappa \in N$ με $(B_4) \neq (B_3)$ και $(B_4) \neq (B_2)$ και $(B_4) \neq (B_1)$ τα οποία ισχύουν.

Άρα $\kappa = 1 + 1 = 2$.

Επομένως $\boldsymbol{\xi = 15 + 8 + 4 + 2 = 29}$.

Παρατηρώ ότι ο τελευταίος πληθικός αριθμός $\xi = 29$ των $I_\kappa \leq \nu - 2 + 29 = 79$ και $I'_\kappa \leq \nu - 2 + 29 = 79$, είναι ίδιος με τον πληθικό αριθμό $\tau = 29$ που βρήκα στο προηγούμενο (6^o) βήμα. **Εδώ σταματά πλέον ο αλγόριθμος. Άρα**

$$\boldsymbol{\Pi(52) = 3 \cdot 79 + 2 = 237 + 2 = 239.}$$

Νικόλαος Καμπούρας

Καθηγητής Μαθηματικών του $9^{ου}$ Γυμνασίου Λάρισας